

## Úkol měření

- 1) Změřte tuhost vazbové pružiny.
- 2) Změřte vlastní kruhovou frekvenci kyvadel.
- 3) Změřte kruhové frekvence kyvadel, koeficient vazby pro různé počáteční podmínky a různou polohu vazbové pružiny.
- 4) Proveďte porovnání výsledků mezi naměřenými a vypočtenými výsledky.
- 5) Vypočtete moment setrvačnosti kyvadel.

## Použité přístroje a pomůcky

Dvě fyzická kyvadla, dva závěsy s optickým snímačem, vazbová pružina, dva čítače kyvů se stopkami, stopky, pravítko, ocelové měřítko, přípravek k měření protažení pružiny se dvěma závažími. laboratorní váhy se sadou závaží.

## Tabulky a výpočty

### *Parametry kyvadel a vazbové pružiny:*

"Vlastnost"	Určeno vztahem, označení:	Výsledná hodnota:
Doba 100 kyvů (nespřažená kyvadla) [s]	$100t_0$	77,5
<b>Vlastní kruhová frekvence</b> [rad.s <sup>-1</sup> ]	$\omega_0 = (2\pi / T) = (\pi / t_0)$	4,054
Prodloužení pružiny [m]	$\Delta y$	0,0335
Hmotnost závaží [kg]	M	0,03
<b>Tuhost pružiny</b> [N/m]	$k = ((2M-M).g) / \Delta y$	8,785
Hmotnost kyvadla [kg]	m	1,228
Vzdálenost těžiště od osy otáčení [m]	L	0,493

T ... perioda kmitů      g ... gravitační zrychlení

A tak jedno z použitých závaží pro měření protažení pružiny o hmotnosti M by kmitalo kolem rovnovážné polohy s touto kruhovou frekvencí:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{8,785}{0,03}} = 292,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

### *Pro počáteční podmínku a) platí:*

(Jedná se o měření při vychýlení kyvadel o stejnou výchylku na stejnou stranu)

l [m]	100t <sub>0</sub> [s]	$\omega_0 = \pi/t_0$ [rad.s <sup>-1</sup> ]
0,140	77,15	4,072
0,312	77,85	4,035
0,493	77,19	4,070

l ... vzdálenost od osy otáčení kyvadel

**Pro počáteční podmínku b) platí:**

(Jedná se o měření při vychýlení kyvadel o stejnou výchylku na opačné strany)

l [m]	100t <sub>1</sub> [s]	$\omega_1 = \pi/t_1$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	Vypočtené hodnoty $\omega_1$
0,140	75,35	4,169	4,1699
0,312	68,60	4,580	4,601
0,493	59,90	5,245	5,315

**Pro počáteční podmínku c) platí:**

l [m]	6t <sub>2</sub> [s]	$\omega_2$	100t <sub>3</sub>	$\omega_3$
0,140	382	0,049	76,4	4,112032
0,312	73	0,258	76,2	4,122825
0,493	31	0,608	76	4,133675

Vypočtené hodnoty $\omega_2$ [rad.s]	Vypočtené hodnoty $\omega_3$ [rad.s]
0,0588	4,113
0,2919	4,346
0,7287	4,783

**Teoretické vypočtení hodnot pro ověření** (příklady výpočtu):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k\omega_0^2}{mgL}l_1^2 + \omega_0^2} = \frac{2,8,785 \cdot 4,054^2}{1,228 \cdot 9,81 \cdot 0,493} 0,140^2 + 4,054^2 = 4,1699 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \frac{k\omega_0}{2mgL}l_1^2 = \frac{8,785 \cdot 4,054}{2 \cdot 1,228 \cdot 9,81 \cdot 0,493} 0,140^2 = 0,0588 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega_3 = \frac{k\omega_0}{2mgL}l_1^2 + \omega_0 = \frac{8,785 \cdot 4,054}{2 \cdot 1,228 \cdot 9,81 \cdot 0,493} 0,140^2 + 4,054 = 4,113 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Koeficient vazby  $\kappa$**

$\kappa$ dle 1)	$\kappa$ dle 2)	dále užito $\kappa$ :	k
0,0280	0,0240	0,0260	8,095
0,1213	0,1248	0,1230	8,560
0,2520	0,2880	0,2700	9,036

Kde  $\underline{k}$  je tuhost vazbové pružiny.

$$1) \quad \kappa_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2} = 0,0280 \qquad 2) \quad \kappa_2 = \frac{2\omega_2\omega_3}{\omega_2^2 + \omega_3^2} = 0,0240$$

$$k = \frac{\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} mgL}{l^2 \left(1 - \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)} = 8,095 \text{ N} / \text{m}$$

### **Moment setrvačnosti kyvadla (J):**

$$J = \frac{mgL}{\omega_0^2} = \frac{1,228 * 9,81 * 0,493}{4,054^2} = 0,361 \text{kg.m}^2$$

### **Závěr**

V měření jsme si dobře vyzkoušeli a prověřili kmitavý pohyb, kdy byly vhodně spojeny dva systémy vhodnou vazbou. Obecně to můžeme pokládat za prospěšné například pro „ošáhání“ si stanovování počátečních podmínek...atd.

Chyby, případně dle nových norem nejistoty, u vypočtených hodnot, jak je možné vidět z výpočtů, neuvádím, jelikož ve starších skriptech byl výpočet chyb požadován u všech naměřených a vypočtených hodnot, v nových skriptech doporučených pro tento předmět to již požadováno není. Proto jsem došel k závěru, že tento bod byl vypuštěn s ohledem k velké pracnosti výpočtu chyb u této úlohy, a tak se zde chybami příliš nezabývám. Je ale zřejmé, že nepřesnosti vznikají například měřením vzdáleností (délka kyvadla, vzdálenost pružiny...), jelikož bylo použito měřidlo s max. chybou 0,5mm, a také se nemuselo úplně přesně podařit zachytit přímo upevnění kyvadla. Další nepřesnost vznikala nejen při měření čítačem, ale hlavně při práci se stopkami, protože člověk má určitou reakční dobu, stopky jen omezenou přesnost, a tak čas, za který bylo dosaženo minima je také zatížen chybou.

Mám-li porovnat koeficienty vazby, které jsou spočteny různými způsoby, napadá mě, že by mohl být nepřesnější ten způsob, u kterého se počítá s doba rázů (dosažení 6 případně 8 minim), protože ve výsledku při počítání úhlové frekvence potom nedělím (jako u čítače) celkový čas 100, ale pouze 6, takže v podstatě přesnost nezvýším skoro ani o řád. Čítač je právě z tohoto důvodu přímo konstruován např. na měření po sto impulsích, jelikož přesnost se zlepší o dva řády (měření doby trvání jednoho impulsu by bylo enormně nepřesné).

Když jsem z vypočteného koeficientu vazby spočítal zpět tuhost vazbové pružiny  $k$ , dá se celkem říci, že se tato hodnota blíží hodnotě vypočtené na základě zatěžování pružiny závažím.

Jak je vidět v tabulkách s hodnotami, lze vidět závislost, že čím je vazba dále od osy, tím je její vliv větší. Můžeme to vidět v tomto porovnání:

$l$ [m]	$k$ :
0,140	0,0260
0,312	0,1230
0,493	0,2700

Kde  $l$  je vzdálenost upevnění vazby od osy  $k$  je koeficient vazby.

Vypočtené úhlové frekvence mají trochu větší hodnotu než ty změřené. Důvod bych hledal jednak v již výše uvedených nepřesnostech, ale také když jsem pozoroval měření, tak jsem si všiml, že někdy došlo pravděpodobně k tomu, že kyvadla nebyla úplně přesně vypuštěna ze stejných poloh, vzájemně se pak mohla ovlivnit ještě jinak než bylo uvažováno při odvozování teoretických vzorců podle nichž jsem spočítal teoretické výsledky.